

①

①

i) Para cada  $x \in \mathbb{R}$  probar que  $\exists$  una sucesión  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$  "  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ .

- Demostrar.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ . Como  $\mathbb{Q}$  es denso  $\Rightarrow \exists r_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$

y así  $|r_n - x| < \frac{1}{n}$ .

Como  $\inf \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0$  "  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

y así  $\forall n > n_0 \quad |r_n - x| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ .

Por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ .

ii) Probar que  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  y  $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

- Demostrar.

• Sabemos que  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A$  "  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$   
 así que por i)  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{Q}}$ . Así  $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$  y  $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$  por definición

• Supongamos  $\mathring{\mathbb{Q}} \neq \emptyset \Rightarrow \exists r \in \mathring{\mathbb{Q}} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  "  $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subset \mathbb{Q}$   
 Pero como  $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es denso  $\Rightarrow \exists y \in \mathbb{I}$  "  $y \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$  lo cual es absurdo.

② Sea  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y acotado.

i) Probar que  $\exists$  sucesiones  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  "  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(A)$  y  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  "  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf(A)$ .

- Demostrar.

Por la caracterización de supremo:  $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$  "  $\sup(A) - \varepsilon < a \leq \sup(A)$

Así sea  $\varepsilon = \frac{1}{n}$   $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists a_n \in A$  "  $\sup(A) - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup(A)$ .

Por tanto  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  y  $|\sup(A) - a_n| < \frac{1}{n}$ . Como en i) ii)

obtenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(A)$ .

Por la caracterización de infimo:  $\forall \varepsilon > 0 \exists b \in A$  "  $\inf(A) \leq b < \inf(A) + \varepsilon$

Así tomamos  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists b_n \in A$  "  $\inf(A) \leq b_n < \inf(A) + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow |\inf(A) - b_n| < \frac{1}{n}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf(A)$ .

Probar que  
ii). Si  $A$  es cerrado  $\Rightarrow \sup(A), \inf(A) \in A$ .

- Demostrar.

Por i) tenemos que  $\sup(A), \inf(A) \in \bar{A}$ . Si  $A$  es cerrado  $\Rightarrow A = \bar{A}$  y se obtiene el resultado.

¿Es cierto el recíproco? No, un contraejemplo es

$$A = [0, 1) \cup (2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$$

Claramente 0 es una inferior de  $A$  y  $0 \in A \Rightarrow 0 = \inf(A)$

3 es una superior de  $A$  y  $3 \in A \Rightarrow 3 = \sup(A)$

y no es cerrado: la sucesión  $\{2 + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a 2

$$\left( \left| 2 + \frac{1}{n} - 2 \right| = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right) \text{ así } 2 \in \bar{A} \text{ y } 2 \notin A.$$

Probar que en cualquier caso  $\sup(A), \inf(A)$  son puntos frontera de  $A$ .

Para el supremo: sea  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists a \in A$  tal  $\sup(A) - \varepsilon < a \leq \sup(A) \Rightarrow$

$$\text{Además } \left[ (\sup(A) - \varepsilon, \sup(A) + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \right]$$

$$\text{Además } \exists y \notin A \text{ tal } \sup(A) \leq y < \sup(A) + \varepsilon \Leftrightarrow y \in [\sup(A), \sup(A) + \varepsilon)$$

(en caso contrario  $\forall y \in [\sup(A), \sup(A) + \varepsilon)$  se tiene que  $y \in A$

lo cual contradice que  $\sup(A)$  es una cota superior de  $A$ )

$$\text{y por tanto } \left[ (\sup(A) - \varepsilon, \sup(A) + \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \right]$$

Para el infimo es análogo: sea  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists a \in A$  tal  $\inf(A) \leq a < \inf(A) + \varepsilon$

$$\Rightarrow \left[ (\inf(A) - \varepsilon, \inf(A) + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \right]$$

$$\text{y } \exists y \notin A \text{ tal } \inf(A) - \varepsilon < y \leq \inf(A) \Rightarrow$$

$$\left[ (\inf(A) - \varepsilon, \inf(A) + \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \right]$$

③ Sea  $(M, d)$  espacio métrico y  $C \subset M$  no vacío.  $\forall \varepsilon > 0$  definimos

$$U_\varepsilon = \{x \in M \mid \text{dist}(x, C) < \varepsilon\}$$

• Probar que  $U_\varepsilon$  es abierto:

$$\text{Sea } x \in U_\varepsilon \Leftrightarrow \text{dist}(x, C) = \inf \{d(x, y) \mid y \in C\} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\exists y \in C \text{ " } \text{dist}(x, y) < \varepsilon$$

1ª forma: lo anterior dice que  $x \in U_\varepsilon \Leftrightarrow \exists y \in C \text{ " } \text{dist}(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\exists y \in C \text{ " } x \in B(y, \varepsilon) \Leftrightarrow U_\varepsilon = \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \text{ que es unión}$$

de bolas abiertas  $\Rightarrow U_\varepsilon$  es abierto.

2ª forma: Veamos  $B(x, r) \subset U_\varepsilon$  con  $r = \varepsilon - \text{dist}(x, C) (> 0)$

$$\text{Si } z \in B(x, r) \Rightarrow$$

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < r + \text{dist}(x, C) = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{dist}(z, C) \leq \text{dist}(z, y) < \varepsilon \Rightarrow z \in U_\varepsilon$$

• Si  $\varepsilon < \varepsilon'$  Probar que  $U_\varepsilon \subset U_{\varepsilon'}$ :

$$\text{Si } x \in U_\varepsilon \Leftrightarrow \text{dist}(x, C) < \varepsilon < \varepsilon' \Rightarrow x \in U_{\varepsilon'}$$

• Probar que  $\bigcap_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon = \bar{C}$

$$x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ x \in U_\varepsilon \Leftrightarrow \text{dist}(x, C) < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{dist}(x, C) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{C}.$$

4) En  $(M, d)$  Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in M$

i) Probar que  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x_0\}$  es compacto:

Sea  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un recubrimiento abierto de  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x_0\}$  e.d

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x_0\} \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

Entonces  $\exists \alpha_0 \in I$   $x_0 \in G_{\alpha_0}$  y como es abierto  $\exists r > 0$ ,  $B(x_0, r) \subset G_{\alpha_0}$

Como  $\{x_n\} \rightarrow x_0 \Rightarrow$  dado ese  $r > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n > n_0, x_n \in B(x_0, r) \subset G_{\alpha_0}$

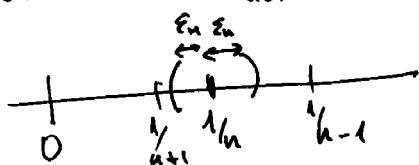
Por otro lado  $\exists N \in \mathbb{N}$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in I$

$$\{x_1, \dots, x_{n_0-1}\} \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \quad (\text{por ser una cantidad finita de elementos})$$

$$\text{y portanto } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x_0\} \subset G_{\alpha_0} \cup \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}$$

que es un subrecubrimiento finito.

ii) En  $\mathbb{R}$  sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , construir un recubrimiento abierto de  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  del que NO se pueda extraer un subrecubrimiento finito.



$$\text{Como } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

la distancia de  $x_n = \frac{1}{n}$  al término anterior

$$\text{y al siguiente es } \min \left\{ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{n(n-1)}, \frac{1}{n(n+1)} \right\} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{y tomamos } \epsilon_n < \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{y } I_n = (x_n - \epsilon_n, x_n + \epsilon_n).$$

Así  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  es un recubrimiento abierto pero no podemos extraer un subrec. finito porque cada  $I_n$  contiene solo un término de la sucesión

(Otra opción: Sea  $G_n = (\frac{1}{n+1}, 2)$  así  $x_n = \frac{1}{n} \in G_n$   
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 2)$  y portanto  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  es un recubrimiento.  
 Pero  $\bigcup_{n=1}^N G_n$  no cubre por ejemplo a  $x_{N+1} = \frac{1}{N+1}$ )